Über ein spezielles schiefes Produkt in der Gruppentheorie.

Von L. RÉDEI in Szeged und A. STÖHR in Göttingen.

Stets bezeichnen G, Γ zwei fest angegebene Gruppen, $a, b, \ldots$ bzw. $\alpha, \beta, \ldots$ ihre Elemente, insbesondere e, ε ihre Einselemente. Bequemlichkeitshalber nehmen wir an, daß G, Γ kein gemeinsames Element haben.

Für gewisse, sehr allgemeine (im wesentlichen auf HAMILTON zurückgehende) Konstruktionen von algebraischen Strukturen haben wir in einer früheren Arbeit [3][1]) die Benennung *schiefes Produkt* eingeführt. Insbesondere haben wir dort für die Gruppen G, Γ ein schiefes Produkt $G \circ \Gamma$ ausführlich untersucht, das so entsteht, daß man in der Menge aller Paare (a, α) eine Multiplikation

$$(a, \alpha)(b, \beta) = (a b^{\alpha} \beta^{\alpha}, a^{b} \alpha^{b} \beta)$$

definiert, wobei

$$b^{\alpha}, \beta^{\alpha} (\in G); \; a^{b}, \alpha^{b} (\in \Gamma)$$

irgendwelche vier Funktionen von je zwei Variabeln sind. Unter anderem haben wir die Bedingungen aufgestellt (s. Arbeit [3], Satz 1), denen diese vier Funktionen zu genügen haben, damit $G \circ \Gamma$ eine Gruppe ist. Diese Gruppen sind sehr allgemein, denn werden die den Spezialfällen

$$(1) \qquad (a, \alpha)(b, \beta) = (a b, a^{b} \alpha^{b} \beta),$$

$$(2) \qquad (a, \alpha)(b, \beta) = (a b^{\alpha}, \alpha^{b} \beta)$$

entsprechenden schiefen Produkte mit $G_1 \Gamma$ bzw. $G_2 \Gamma$ bezeichnet, so gilt, daß die Theorie der Gruppen $G_1 \Gamma, G_2 \Gamma$ mit der Schreierschen bzw. Zappa—Szépschen Erweiterungstheorie der Gruppen zusammenfällt (s. [3], Sätze 3, 6). Umgekehrt hat KOCHENDÖRFFER [2] neulich gezeigt, daß sich die Gruppen vom Typ $G \circ \Gamma$ auf eine sehr einfache Weise durch Konstruktion von Gruppen vom Typ $G_1 \Gamma$ und $G_2 \Gamma$ gewinnen lassen. Wir erwähnen ferner, daß FUCHS [1] das schiefe Produkt $G \circ \Gamma$ auf den Fall verallgemeinert hat, daß G, Γ mit einem gemeinsamen Operatorbereich versehen sind.

Man würde gerne nach wesentlich neuen Typen von aus G, Γ gebildeten

---

[1]) Mit [ ] wird auf das Literaturverzeichnis am Ende dieser Arbeit verwiesen.

schiefen Produkten suchen, die zur Konstruktion von Gruppen ebenfalls gut eignen. Von diesem Bestreben geleitet untersuchen wir in dieser Arbeit das schiefe Produkt $G^{2'}\Gamma$, das von den obigen darin abweicht, daß in ihm die Multiplikation durch

$$(a, \alpha)(b, \beta) = (a^{\beta} b, \alpha^{b} \beta) \tag{2'}$$

definiert wird. Obwohl sich (2') nach dem äußeren Anschein stark von (2) unterscheidet, werden wir das „negative" aber in theoretischer Hinsicht interessante Resultat erhalten, daß die Gruppen $G^{2'}\Gamma$ nichts wesentlich neues bieten, sondern daß sie (im abstrakten Sinne) eine echte Teilmenge aller Gruppen $G^{2}\Gamma$ bilden, womit wir meinen, daß jede Gruppe $G^{2'}\Gamma$ isomorph mit einer Gruppe $G^{2}\Gamma$ ist, aber nicht umgekehrt.[2])

Als Vorbereitung zeigen wir, daß jede Gruppe $G^{2'}\Gamma$ mit einer solchen Gruppe $G^{2'}\Gamma$ isomorph ist, die (e, ε) zum Einselement hat.

Betrachten wir nämlich eine beliebige Gruppe $\mathfrak{G} = G^{2'}\Gamma$. Bezeichnen wir mit Π die Permutation

$$(a, \alpha) \to (r^{-1}a, \varrho^{-1}\alpha) \tag{3}$$

der Elemente von $\mathfrak{G}$, wobei r, ϱ je ein Element von G bzw. Γ ist. Wird dann in der Menge der (a, α) die „neue" Multiplikation

$$(a, \alpha) \times (b, \beta) = \Pi(\Pi^{-1}(a, \alpha) \cdot \Pi^{-1}(b, \beta))$$

definiert, so entsteht (s. [3], § 2) eine mit $\mathfrak{G}$ isomorphe Gruppe $\mathfrak{G}_1$, und zwar wird $\mathfrak{G}$ durch (3) isomorph auf $\mathfrak{G}_1$ abgebildet. Da Π^{-1} die Permutation

$$(a, \alpha) \to (ra, \varrho\alpha)$$

ist, so folgt aus (2') sofort

$$(a, \alpha) \times (b, \beta) = (r^{-1}(ra)^{\varrho\beta} rb, \varrho^{-1}(\varrho\alpha)^{rb} \varrho\beta).$$

Die rechte Seite ist von derselben Form wie die von (2'); der einzige Unterschied ist, daß an Stelle des Funktionenpaars a^{β}, α^{b} das ähnlich beschaffene Funktionenpaar

$$r^{-1}(ra)^{\varrho\beta} r, \ \varrho^{-1}(\varrho\alpha)^{rb} \varrho$$

getreten ist. Hiernach ist auch $\mathfrak{G}_1$ eine der Gruppen $G^{2'}\Gamma$. Werden noch r, ϱ so spezialisiert, daß (r, ϱ) eben das Einselement von $\mathfrak{G}$ bezeichnet, so gilt wegen des Isomorphismus (3) auch, daß $\mathfrak{G}_1$ das Einselement (e, ε) hat. Die Behauptung haben wir bewiesen.

Deshalb dürfen wir uns fortan auf die Gruppen $G^{2'}\Gamma$ beschränken, die das Einselement (e, ε) haben. Wir beweisen nunmehr den folgenden:

---

[2]) Das erscheint paradox, denn nach (2), (2') sind beide schiefen Produkte $G^{2}\Gamma, G^{2'}\Gamma$ von zwei willkürlichen Funktionen der gleichen Form $r^{\varrho} (\in G), \varrho^{r} (\in \Gamma)$ abhängig $(r \in G, \varrho \in \Gamma)$. Die Erklärung ist, wie es aus unseren Ausführungen sichtbar wird, daß die Forderung der Assoziativität für $G^{2'}\Gamma$ einschneidender ist als für $G^{2}\Gamma$.

S a t z. *Damit ein durch (2') definiertes schiefes Produkt* $\mathfrak{G} = G\,{}^{2'}\Gamma$ *eine Gruppe mit dem Einselement* (e, ε) *ist, ist notwendig und hinreichend, daß*

(4) $$a^{\varepsilon} = a,\ \alpha^{e} = \alpha, \qquad e^{\alpha} = e,\ \varepsilon^{a} = \varepsilon,$$

(5) $$a^{\beta\gamma} = (a^{\beta})^{\gamma}, \qquad \alpha^{bc} = (\alpha^{b})^{c},$$

(6) $$(ab)^{\gamma} = a^{\gamma} b^{\gamma}, \qquad (\alpha\beta)^{c} = \alpha^{c}\beta^{c}.$$

(7) $$a^{\beta^{c}} = a^{\beta}, \qquad \alpha^{b^{\gamma}} = \alpha^{b}$$

gelten. Jede solche Gruppe $\mathfrak{G} = G\,{}^{2'}\Gamma$ *ist zu derjenigen Gruppe* $\mathfrak{G}_0 = G\,{}^{2}\Gamma$ *isomorph, in der die Elemente nach der Regel*

(8) $$(a, \alpha)(b, \beta) = (a b^{\alpha^{-1}}, \alpha^{b}\beta)$$

multipliziert werden. Dabei ist

(9) $$(a, \alpha) \to (a^{\alpha^{-1}}, \alpha)$$

eine isomorphe Abbildung von $\mathfrak{G}$ *auf* $\mathfrak{G}_0$.

B e m e r k u n g. Das in (8) figurierende Funktionenpaar $b^{\alpha^{-1}}$, α^{b} genügt nach (4) bis (7) den Bedingungen

$$a^{\varepsilon^{-1}} = a,\ \alpha^{e} = \alpha, \qquad e^{\alpha^{-1}} = \alpha,\ \varepsilon^{a^{-1}} = \varepsilon$$

$$a^{(\beta\gamma)^{-1}} = (a^{\gamma^{-1}})^{\beta^{-1}}, \qquad \alpha^{bc} = (\alpha^{b})^{c},$$

$$(ab)^{\gamma^{-1}} = a^{\gamma^{-1}} b^{\gamma^{-1}}, \qquad (\alpha\beta)^{c} = \alpha^{c}\beta^{c},$$

$$a^{(\beta^{c})^{-1}} = a^{\beta^{-1}}, \qquad \alpha^{b^{\gamma^{-1}}} = \alpha^{b}.$$

Hiernach sind die im Satz erwähnten Gruppen $\mathfrak{G}_0 = G\,{}^{2}\Gamma$ lauter solche Gruppen, die auch im Satz 11 der Arbeit [3] betrachtet wurden. Man sieht hieraus auch, daß die Gruppen $G\,{}^{2'}\Gamma$ nicht alle Gruppen $G\,{}^{2}\Gamma$ erschöpfen, sondern nur die einfachsten unter ihnen, die allerdings eine interessante Klasse von Gruppen bilden. (Vgl. auch SZÉP [4].)

B e w e i s d e s S a t z e s. Vor allem folgt aus (2') sofort, daß (4) notwendig und hinreichend dafür ist, daß $\mathfrak{G}$ das Einselement (e, ε) hat. Fortan nehmen wir (4) schon an.

Unter dieser Annahme wollen wir dann die Bedingung der Assoziativität für $\mathfrak{G}$ aufstellen. Diese lautet nach (2') vorläufig

$$(a^{\beta} b, \alpha^{b}\beta)(c, \gamma) = (a, \alpha)(b^{\gamma} c, \beta^{c}\gamma).$$

Wieder nach (2') läßt sich hierfür

$$((a^{\beta} b)^{\gamma} c, (\alpha^{b}\beta)^{c}\gamma) = (a^{\beta^{c}\gamma} b^{\gamma} c, \alpha^{b^{\gamma} c}\beta^{c}\gamma)$$

schreiben. Dies spaltet sich in die zwei Gleichungen

(10) $$(a^{\beta} b)^{\gamma} = a^{\beta^{c}\gamma} b^{\gamma}, \quad (\alpha^{b}\beta)^{c} = \alpha^{b^{\gamma} c}\beta^{c}$$

auf.

Zunächst zeigen wir, daß aus (10) (und (4)) die Gleichungen (5) bis (7) folgen. Hierzu setzen wir in (10_1), (10_2) $\beta = \varepsilon$ bzw. $b = e$ ein und kommen mit Hilfe von (4) zu den Gleichungen (6). Aus (10) und (6) folgt

$$(a^{\beta})^{\gamma} = a^{\beta^{c}\gamma}, \quad (\alpha^{b})^{c} = \alpha^{b^{\gamma}c}.$$

Wird hier einmal $c = e$, andermal $\gamma = \varepsilon$ eingesetzt, so entstehen nach (4) die vier Gleichungen (5), (7). Umgekehrt ist klar, daß aus (5) bis (7) die Gleichungen (10) folgen.

Bisher haben wir bewiesen, daß (4) bis (7) notwendig und hinreichend sind, damit $\mathfrak{G}$ assoziativ ist und das Einselement (e, ε) hat. Ist das der Fall, so ist aber $\mathfrak{G}$ auch schon eine Gruppe, denn aus (2'), (5), (4) folgt

$$((a^{-1})^{\alpha^{-1}}, (\alpha^{-1})^{a^{-1}})(a, \alpha) = (e, \varepsilon)$$

d. h. die Existenz des Inversen in $\mathfrak{G}$. Wir haben die erste Hälfte des Satzes bewiesen.

Um die zweite Hälfte zu beweisen, betrachten wir eine Gruppe $\mathfrak{G} = G\,\Gamma$, definiert durch (2'), (4) bis (7). Wir bemerken vor allem, daß dann bei jedem $\varrho (\in \Gamma)$

$$a \rightarrow a^{\varrho}$$

eine Permutation der Elemente von G ist. Das stimmt, denn aus der Annahme $a^{\varrho} = b^{\varrho}$ folgt wegen (5_1) zunächst $a^{\varepsilon} = b^{\varepsilon}$, dann hieraus nach (4_1) $a = b$.

Wegen des bewiesenen ist (9) eine Permutation Π der Elemente von $\mathfrak{G}$. Also ist Π^{-1} (wieder wegen (4_1), (5_1)) die Permutation

(11) $$(a, \alpha) \rightarrow (a^{\alpha}, \alpha).$$

Führen wir in $\mathfrak{G}$ die neue Multiplikation

(12) $$(a, \alpha) \times (b, \beta) = \Pi(\Pi^{-1}(a, \alpha) \cdot \Pi^{-1}(b, \beta))$$

ein. Nach der Arbeit [3], § 2 entsteht so eine mit $\mathfrak{G}$ isomorphe Gruppe, auf die $\mathfrak{G}$ durch (9) isomorph abgebildet wird. Wenn wir also zeigen, daß die rechte Seite von (12) mit der von (8) übereinstimmt, so werden wir die zweite Hälfte das Satzes bewiesen haben.

Nach (2'), (4) bis (7) und der Bedeutung von Π berechnet sich die rechte Seite von (12) zu

$$\Pi((a^{\alpha}, \alpha)(b^{\beta}, \beta)) = \Pi((a^{\alpha})^{\beta} b^{\beta}, \alpha^{b^{\beta}} \beta) = \Pi(a^{\alpha\beta} b^{\beta}, \alpha^{b} \beta) =$$
$$= ((a^{\alpha\beta} b^{\beta})^{(\alpha^{b}\beta)^{-1}}, \alpha^{b}\beta) = ((a^{\alpha\beta} b^{\beta})^{\beta^{-1}(\alpha^{b})^{-1}}, \alpha^{b}\beta) = ((a^{\alpha} b)^{(\alpha^{b})^{-1}}, \alpha^{b}\beta).$$

Nun gilt wegen (5_1), (7_1)

$$a^{\varepsilon} = (a^{(\beta^{c})^{-1}})^{\beta^{c}} = (a^{(\beta^{c})^{-1}})^{\beta},$$

also nach (4_1), (5_1)

$$a^{(\beta^{c})^{-1}} = a^{\beta^{-1}}.$$

Hiernach ist das vorher berechnete Element gleich

$$((a^{\alpha} b)^{\alpha^{-1}}, \alpha^{b}\beta).$$

Dies stimmt wegen (4_1), (5_1), (6_1) wirklich mit der rechten Seite von (8) überein, womit der Satz bewiesen ist.

Literaturverzeichnis.

[1] L. Fuchs, Rédeian skew product of operator groups, *diese Acta,* **14** (1952), 228—238.

[2] R. Kochendörffer, Zur Theorie der Rédeischen schiefen Produkte, *Journal für die reine und angew. Math.*, **192** (1953) (im Erscheinen).

[3] L. Rédei, Die Anwendung des schiefen Produktes in der Gruppentheorie, *Journal für die reine und angew. Math.*, **188** (1950), 201—227.

[4] J. Szép, On the structure of groups which can be represented as the product of two subgroups, *diese Acta,* **12 A** (1950), 57—61.

(Eingegangen am 21. April 1953.)